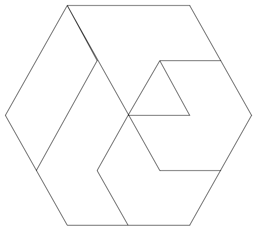
Le puzzle « de l'UNICEF ». ***Atelier M16.***

Arnaud GAZAGNES, Groupe « Jeux » de l'APMEP
Lycée Marie de Champagne, 10 000 TROYES Arnaud.Gazagnes@ac-reims.fr

Ce puzzle doit son nom à un casse-tête trouvé dans le livre Casse-tête du monde entier, publié pour le compte de l'UNICEF, dont la représentation est la suivante :



Il s'agit dans cet atelier d'utiliser ce puzzle comme support d'activités mathématiques à divers niveaux de l'enseignement.

Au tout début, l'élève se sera familiarisé avec ce puzzle en le fabriquant chez lui (en collant sur du carton puis en le découpant), avec diverses consignes : trouver une autre solution (il y a 80 configurations différentes), trouver une configuration donnée (comme avec un tangram), … L'enseignant aura numéroté les pièces, afin que leur désignation ultérieure soit plus facile. Ce temps (nécessaire) d'approche fait, les activités mathématiques proprement dites peuvent commencer.

L'un des grands intérêts de ce puzzle est qu'il y a un angle de 120° entre deux côtés consécutifs : de nouveaux repères (par exemple) plus inhabituels sont ainsi utilisés. L'attention du lecteur sera attirée sur deux difficultés (et dans la même activité) : la position des objets (centre ou axe de symétrie par rapport à la figure, …) et le type de papier (blanc, quadrillé, pointé triangulaire, …).

L'atelier propose deux orientations :

I. Du puzzle aux notions mathématiques.

Il s'agit de partir du puzzle comme support d'activité et de travailler diverses notions mathématiques.

1. Mon point de départ.

Le lecteur trouvera dans D'autres objets mathématiques (APMEP, Régionale de Lorraine) diverses activités, tant dans le domaine géométrique (symétries, pavages,

…) que numériques (fractions, pourcentages, …). L'essentiel de cette première orientation se trouve dans la brochure ; les activités ne seront donc pas reprises ici. En voici d'autres :

2. Programme de tracé.

L'enseignant donne à chaque élève un puzzle (ou une pièce du puzzle) où sont tous les noms des points de la figure. L'élève doit rédiger un programme de tracé (« la figure téléphonée ») qu'il donnera à un autre élève. Ensuite, chaque élève pourra faire (avec son matériel de géométrie ou avec un logiciel de géométrie) le dessin du puzzle avec le programme d'un <u>autre</u> élève[1]), dès la 6ème [2]. Suivant le niveau enseigné, il pourra être imposé des mots comme « rotation », « symétrique », « translaté », …

3. Reproductions.

L'élève doit reproduire sur feuille blanche le puzzle donné avec les instruments de géométrie usuels[3] ; le dessin aura ou pas des codages de longueurs ou de mesures d'angles.

L'élève doit faire un dessin homothétique[4] en reproduisant l'original à l'échelle 1 : k (réduction) ou k : 1 (agrandissement), k > 1.

4. Parallélisme et coordonnées.

On donne sur une feuille deux droites sécantes (D1) et (D2) en O. On donne sur (D1) les points A1, B1, … et sur (D2) les points A2, B2, … tels que A1 soit le projeté de A parallèlement à (D2) et que A2 soit le projeté de A parallèlement à (D1) et de même pour les autres points (sur un même point d'une des droites, il peut donc y avoir plusieurs projetés.) Par tracés de parallèles, l'élève trouve A, B, … à relier selon des consignes données pour trouver le puzzle. Il n'y a qu'un pas à

---

[1] C'est à cette occasion qu'ils se rendent compte de l'importance de la hiérarchisation des consignes et de la pertinence des données…

[2] En effet, les points sont soit les sommets du bord soit des milieux de segments… sous réserve de hiérarchiser les consignes !

[3] Le compas sert ici à un report de longueur (les élèves le voient souvent comme seul outil à rosaces…).

[4] Cette idée provient d'un item d'une Évaluation d'entrée en Sixième dans lequel l'élève doit reproduire une maison dont un côté mesure 4 cm pour un nouveau côté de longueur 6 cm : certains élèves commencent par ajouter 6 – 4 = 2 à toutes les longueurs (et ne peuvent donc pas finir le dessin), au lieu de multiplier toutes les longueurs par 6/4 = 1,5.

franchir pour parler des coordonnées : on donne celles de A, B, … permettant de placer les points.

5. Transformations usuelles.

L'élève construit l'image du puzzle par une transformation usuelle donnée (symétrie ou rotation). L'attention demandée dans l'introduction prend ici toute sa dimension : l'élève ne voit pas du tout du même œil la même notion suivant que l'axe de symétrie est « horizontal », « vertical », « oblique », passant ou pas sur le dessin du puzzle, suivant que le centre de symétrie est un sommet ou pas, suivant la valeur de l'angle (± 60° ou ± 120° [5]) de la rotation, suivant le type de papier utilisé, … Selon les difficultés rencontrées, l'élève pourra utiliser éventuellement son propre puzzle.

6. Et bien d'autres encore.

La liste est loin d'être exhaustive : le lecteur pourra, comme il a été montré lors de l'atelier, reprendre des idées d'activités rencontrés avec les *Combis* du Jeux 5 (APMEP) ou avec le *Puzzle de Saarlouis* (Autour du puzzle de Saarlouis, APMEP, Régionale de Lorraine) et les appliquer à ce puzzle.

II. Des notions mathématiques au puzzle.

Il s'agit d'utiliser des notions mathématiques pour dessiner le puzzle.

1. Le « saute grenouille ».

Sur une feuille sont donnés une liste d'équations et, dessous, un ensemble de points notés non pas par des lettres mais par des réels *(voir ci-dessous)*.

Unicef1.fig (document Cabri)

Un premier énoncé est proposé, par exemple « *Quelle est la largeur (en cm) du rectangle de longueur 30 cm et d'aire 6 dm² ?* » L'élève cherche sur la feuille donnée le point qui a pour nom la solution de cet énoncé, soit 20. Il cherche ensuite la réponse à l'énoncé suivant, soit 12 *(voir ci-dessous)* et le point correspondant, qu'il relie au point précédent. Et ainsi de suite. Il est important que, pour l'intérêt de cette activité, l'erreur soit possible et que des points plausibles (même inutiles) soient donnés : ainsi la solution du premier problème étant 600/30 = 20 et l'erreur

[5] Ou toute autre valeur si le papier n'est pas pointé triangulaire.

30/6 = 5 apparaissant dans les réponses d'élèves, on nommera non seulement un point noté 20 mais aussi un point noté 5. Le dessin final permet une autoévaluation. On notera que le puzzle (dessin solution) ne pouvant pas être dessiné d'un seul trait, il y aura plusieurs départs et qu'un point pourra servir à deux équations.

Voici quelques thèmes possibles[6] :

- résoudre un problème, comme dans l'exemple précédent : *Quelle est la largeur (en cm) du rectangle de longueur 30 cm et d'aire 6 dm² ?*
- écrire les nombres « en français » : *deux unités et une dizaine* ;
- résoudre une équation : *2 x = 6* ;
- travailler une notion, comme le théorème de Pythagore : *Le triangle MER est rectangle en E, ER = 12 et MR = 13. Combien vaut EM ?*
- travailler une technique ou une propriété calculatoire : *2 + 3 × 5*.

2. Dessin avec les fonctions affines.

L'élève doit dessiner le puzzle à l'aide de fonctions affines par morceaux (et le moins possible). Le gros du travail consiste à trouver les intervalles correspondants et les ordonnées à l'origine, les pentes étant au nombre de 3 seulement (à cause du parallélisme) : 0 et $\pm \sqrt{3}/2$ (on peut se ramener à $\pm \sqrt{3}$ avec un choix judicieux des unités).

3. L'outil vectoriel.

L'idée est de construire les différents points du puzzle vectoriellement. Trois pistes sont possibles : la première donne les points[7] définis par des égalités vectorielles, la deuxième les donne par des sommes vectorielles et la troisième travaille les repères (et les coordonnées). Dans les deux premières, une consigne de tracé à la fin permet à l'élève une autoévaluation[8].

a) Multiplications de vecteurs par des réels.

Sur un papier pointé *(voir exemple ci-dessous)*, on donne un point A et quatre vecteurs u, v, w et x.

---

[6] On verra dans les réponses $21 = 2 \times 10 + 1$; la réponse attendue dans le troisième énoncé est 3 et l'on verra $4 = 6 - 2$; celle du quatrième énoncé est $5 = \sqrt{(13^2 - 12^2)}$ et l'on verra $\sqrt{313} = \sqrt{(13^2 + 12^2)}$; celle du cinquième énoncé est $17 = 2 + (3 \times 5)$ et l'on verra $25 = (2 + 3) \times 5$. On remarquera que 5 intervient deux fois.

[7] Les points sont rangés dans l'ordre alphabétique ; ce choix est tout à fait discutable !

[8] Chacun est invité à faire l'activité pour voir quels buts pédagogiques ont été cherchés.

Les points B, C, …, P sont définis de proche en proche avec l'une des différents possibilités suivantes :

- le point à trouver est l'extrémité d'un vecteur défini avec l'un des quatre vecteurs donnés et le coefficient multiplicateur est à loisir entier naturel, relatif, fractionnaire… (comme B ou F) ;
- le point à trouver est l'extrémité d'un vecteur défini avec des points précédemment construits (comme G) ;
- le point à trouver est l'origine d'un vecteur (défini comme auparavant) (comme M) ;
- le point à trouver est solution d'une équation vectorielle (défini comme auparavant) (comme K ou L).

Unicef2.fig (document cabri)

Construis sur la figure les points B, C, D, …, O, P à l'aide des égalités vectorielles suivantes :

AB = 2 x	AF = – 2 u	BG = AF	AC = – v
CD = x	DE = CD	FH = 3 x	GK = – 1/2 GB
GO = w	AN = 2 w	GI = 2 x	MI = u
NP = 2 x	GL = 1/2 AG	CJ + 2 u = 0	

Trace les lignes brisées suivantes : JCABIPNFA, GKO, CLM, EDGHD.

b) Sommes vectorielles.

Sur un papier pointé *(voir exemple ci-dessous)*, on donne un point O et quatre vecteurs u, v, w et x. Les points A, B, …, P sont les extrémités de vecteurs d'origine O, définis indépendamment les uns des autres, à l'aide de sommes de vecteurs choisis parmi les quatre donnés. Les points à construire sont des points du réseau (comme précédemment), même si la construction donne des points intermédiaires qui ne sont pas sur le réseau (comme pour M)[9]. De plus, l'ordre des vecteurs n'est pas anodin : certains élèves ne voient pas du même œil v – u et – u + v, par exemple.

Unicef3.fig (document cabri)

1. Construis sur la figure les points A, B, C, D, …, P à l'aide des égalités vectorielles suivantes :

OA = u + 3 v	OB = 2 w + x	OC = 3 u – 2 x	OD = w + u
OE = 3 u	OF = w – 2 x	OG = w	OH = w + u – v

[9] Cela a gêné quelques-uns de mes élèves.

OI = 2 u + x   OJ = 2 v – u   OK = – u + x + 2 v   OL = u
OM = 1/2 w + 3/2 x   ON = – u + v   OP = – w + 2 u

2. Trace les lignes brisées suivantes : JCABIPNFA, GKO, CLM, EDGHD.

c) Repères.

L'activité précédente peut continuer avec celle-ci, avec les repères. Dans un premier temps *(qu. 3 à 5)*, il s'agira d'un repère d'origine O (tous les points étant définis avec O) et des vecteurs unitaires u et v, dans lequel on écrira tous les vecteurs OA, …, OP en fonction de u et v seulement (les vecteurs w et x étant définis par w = u + v et x = u – v) et on déterminera les coordonnées de tous les points A, …, P. Dans un deuxième temps, il s'agira d'un changement d'origine *(qu. 6)* dans lequel on écrira les nouvelles coordonnées des points ou, plus difficile (à cause de la présence de $\sqrt{3}$), d'un changement de base *(qu. 7)*.

3. Exprime à l'aide des vecteurs w et x les sommes u + v et u – v.
4. Écris les vecteurs OA, …, OP à l'aide seulement des vecteurs u et v.
5. Déduis-en les coordonnées des points A, …, P dans le repère (O ; u, v).
6. La relation de Chasles donne GA = OA – OG : écris le vecteur GA en fonction des vecteurs u et v.

   Déduis-en les coordonnées du point A dans le repère (G ; u, v).

   Comme obtient-on facilement les nouvelles coordonnées ?

   Fais de même pour tous les autres points.
7. *(Avec des racines !)* Écris[10] les vecteurs u et v en fonction des vecteurs usuels i et j.

   Écris les vecteurs OA, …, OP à l'aide seulement des vecteurs i et j.

Remarque : mes élèves de Seconde, malgré les difficultés pour certains et les pièges rencontrés, ont beaucoup aimé faire les dessins, chacun à leur vitesse. Le fait de trouver un dessin à la fin a été un moteur. Peu après, ce sont eux qui m'en apportés… que leurs camarades ont faits ! Et je suis persuadé qu'en créant ces dessins (notamment dans la décomposition vectorielle), ils ont réellement fait des maths. « *Le jeu est la forme la plus élaborée de la recherche.* », disait Einstein…

[10] Je n'ai pas encore testé cette question cette année : elle reste une piste de travail.