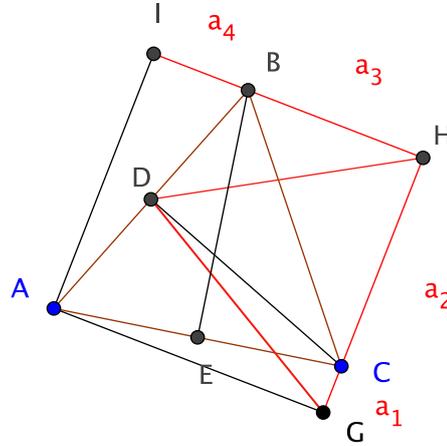


Résumé : Énoncé de l'exercice Omega 8 – Un triangle équilatéral ABC est inscrit dans le rectangle $AIHG$. Montrez que la somme des aires des triangles AIB et AGC est égale à l'aire du triangle BCH .

Vous trouverez dans ce court article des preuves utilisant des outils simples (droite des milieux d'un triangle, parallélogramme, quadrilatère inscriptible, théorème de Pythagore, isométries simples ...). Et le résultat final est gratifiant !

Un peu de cuisine avec le théorème de Pythagore pour débiter ...



$[CD]$ est la hauteur de ABC issue de C . Posons $AB = BC = CA = a$ et $CD = h$ ($h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$).

Le quadrilatère $AGCD$ est inscriptible (angles droits en D et G) dans le cercle de diamètre AC . On en déduit vu l'orientation, que $\widehat{DGC} = \widehat{DAC} = \frac{\pi}{3}$. De même avec $DBHC$ on a $\widehat{DHC} = \widehat{DBC} = \frac{\pi}{3}$. Donc le triangle DHG est aussi équilatéral. Signalons au passage que cela donne une condition nécessaire et suffisante d'existence de

ABC pour un rectangle ($L \times l$) donné – $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{L}{l} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ – et fournit un procédé de construction de ABC .

En notant h_1 la hauteur du triangle DHG , nous déduisons par le théorème de Pythagore que

$$h_1^2 = (a_1 + a_2)^2 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 = h^2 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2} - a_1\right)^2 \text{ d'où il résulte par la deuxième égalité que}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 = h^2 \tag{1}$$

De même,

$$a_3^2 + a_4^2 + a_3 a_4 = h^2 \tag{2}$$

Enfin, BCH étant rectangle en H , toujours par le théorème de Pythagore,

$$a_2^2 + a_3^2 = a^2 = \frac{4}{3}h^2 \tag{3}$$

Dès lors (1) et (3) entraînent $a_2^2 + 4a_1^2 + 4a_1 a_2 = 3a_3^2$, soit

$$(a_2 + 2a_1)^2 = 3a_3^2 \tag{4}$$

De même, (2) et (3) entraînent

$$(a_3 + 2a_4)^2 = 3a_2^2 \tag{5}$$

Par produit de (4) et (5) on obtient $9(a_2 a_3)^2 = [(a_2 + 2a_1)(a_3 + 2a_4)]^2$ et puisque tous les a_i sont positifs, l'égalité se simplifie en

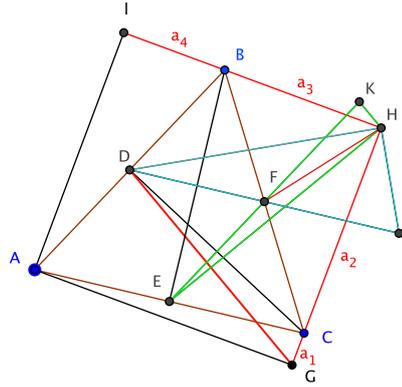
$$3(a_2 a_3) = (a_2 + 2a_1)(a_3 + 2a_4) \tag{6}$$

(6) équivaut à $3(a_2 a_3) = a_2 a_3 + 2a_4 a_2 + 2a_3 a_1 + 4a_1 a_4$ ou encore à $a_2 a_3 = a_4 a_2 + a_3 a_1 + 2a_1 a_4$ qui s'écrit aussi

$$a_2 a_3 = a_4(a_2 + a_1) + a_1(a_4 + a_3)$$

Enfin, en multipliant les deux membres par $\frac{1}{2}$ $\text{aire}BHC = \text{aire}AIB + \text{aire}AGC$ C.Q.F.D.

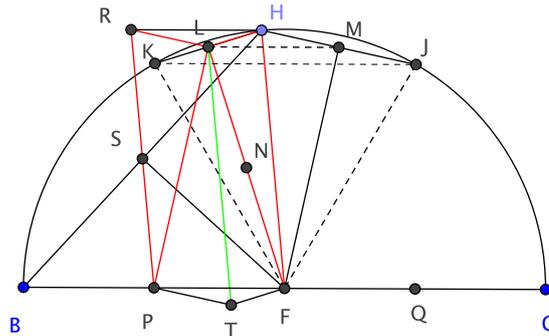
Une preuve géométrique avec des déplacements liés au triangle équilatéral



$[CD]$ est la hauteur du triangle ABC issue de C . On introduit les milieux F et E de $[BC]$ et $[AC]$. Le quadrilatère $AGCD$ est inscriptible (Angles droits en D et G) dans le cercle de diamètre AC . On en déduit vu l'orientation, que $\widehat{DGC} = \widehat{DAC} = \frac{\pi}{3}$. De même avec $DBHC$, on a $\widehat{DHC} = \widehat{DBC} = \frac{\pi}{3}$. Donc, le triangle DHG est équilatéral de même orientation que ABC . Dans la rotation de centre D et d'angle (\vec{BA}, \vec{BC}) G a pour image H , A a pour image E et E a pour image F . Notons K et J les symétriques de E et D par rapport à F . Nous pouvons alors conclure que C a pour image K dans la rotation de centre D précédente. Finalement cette rotation transforme le triangle AGC en EHK . Un raisonnement analogue peut être fait avec la rotation de centre E et d'angle (\vec{AB}, \vec{AC}) qui transforme AIB en DHJ . F est le milieu des hypoténuses des triangles rectangles DHJ et EHK . Les points K, J, H sont situés sur le cercle de diamètre $[BC]$ et les triangles isocèles FHJ et FHK ont une aire égale à la moitié de celles des triangles rectangles DHJ et EHK . La somme des distances du point H aux segments $[FK]$ et $[FJ]$ et égale à la distance de H à $[BC]$ d'après une propriété classique du triangle équilatéral (Pour tout point situé sur un côté, la somme des distances de ce point aux deux autres côtés est égale à la hauteur du triangle – ici le triangle, non tracé sur la figure, est constitué par (FK) , (FJ) et la droite passant par H et parallèle à (BC)). De cela, nous concluons que la somme des aires des triangles isocèles FHJ et FHK est égale à celle du triangle FHB puisque ils ont tous une même « base » égale à $\frac{1}{2}BC$. Comme le triangle FHB a une aire égale à la moitié de CHB (F milieu de $[BC]$), nous pouvons conclure en multipliant par deux que :

$$\boxed{\text{aire}BHC = \text{aire}AIB + \text{aire}AGC \quad \text{C.Q.F.D.}}$$

Mais il est aussi possible de prouver cette égalité d'aire par un découpage des triangles FHK et FHJ reconstituant BFH . En effet AGC et AIB ont des aires doubles des triangles FHK et FHJ .



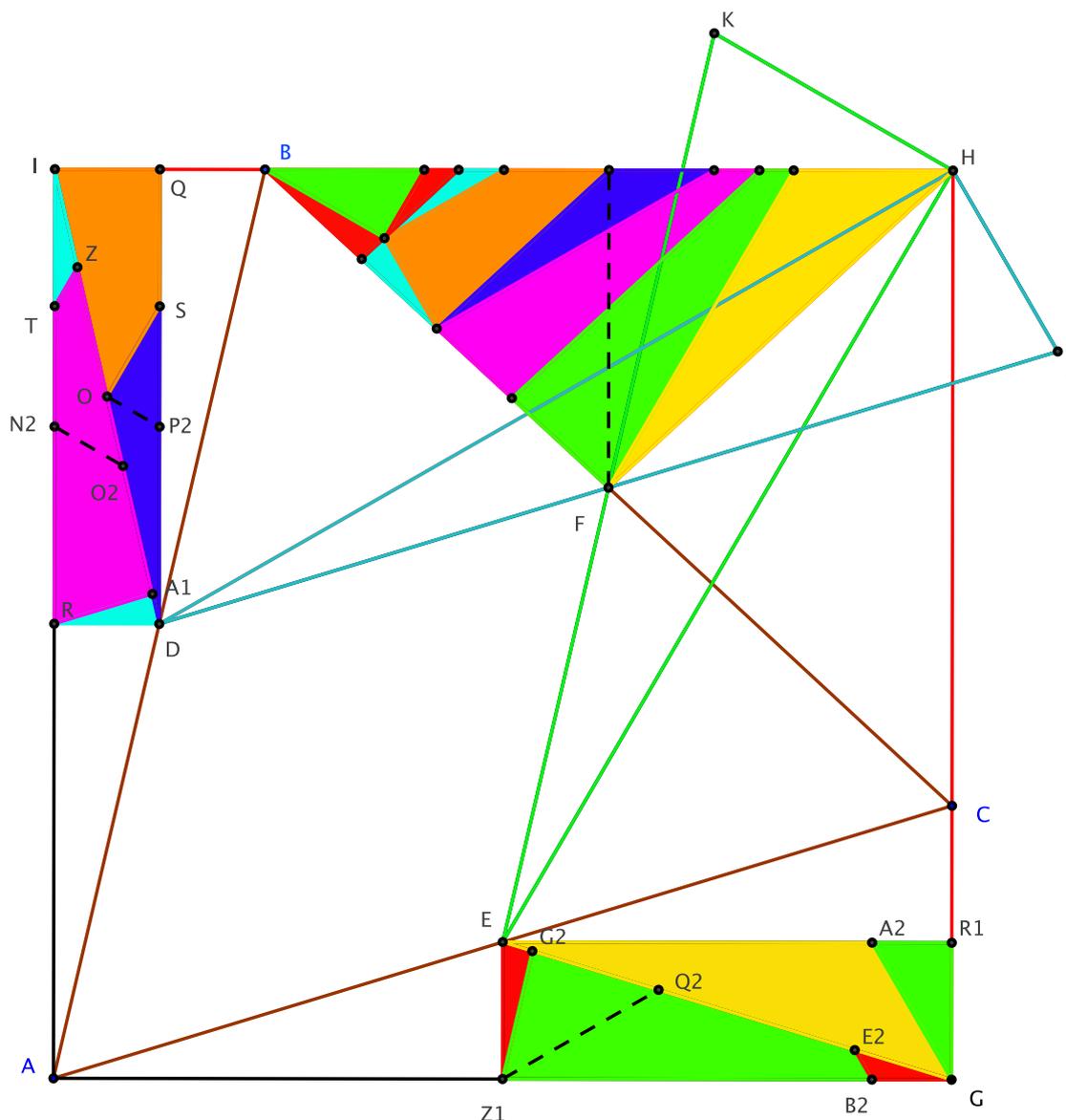
Nous avons extrait une partie de la première figure pour la compléter en introduisant l'arc du demi-cercle de diamètre $[BC]$ contenant H , les milieux M, L, S des cordes $[HJ]$, $[HK]$ et $[BH]$ ainsi que P et N ceux de $[BF]$ et $[LF]$. On construit alors le symétrique T de H par rapport à N et le symétrique R de P par rapport à S . Par construction de K et J (voir la première partie) $BFJK$ est un parallélogramme ainsi que $RHPB$ et $RHFP$. Comme $[LM]$ est le segment des milieux du triangle HKJ nous en déduisons que $\vec{LM} = \vec{PF}$. Le triangle RLP est donc le translaté du triangle HMF par le vecteur \vec{FP} . $LHFT$ et $RLTP$ sont aussi par construction des parallélogrammes et constitués chacun de la réunion de deux triangles symétriques isométriques à FHL et FHM dont les aires valent $\frac{1}{4}$ de celles de AGC et AIB . Puisque le triangle RLH est le translaté du triangle PTF par le vecteur \vec{FH} , la réunion de $LHFT$ et $RLTP$ a même aire que le parallélogramme $RHFP$ dont l'aire correspond à celle de BFH (RHS symétrique de PBS). La figure fournit un moyen de découper deux quarts de AGC et de AIB pour reconstituer BSF et FSH . Réciproquement, on peut partir de BSF et FSH pour reconstituer AGC et AIB .

Réalisation du découpage des triangles AGC et AIB permettant la reconstitution de BCH . On se limite aux "demi-triangles" constitués par les rectangles inscrits ayant pour diagonales les médianes issues de G et I . On achève ensuite à l'aide de symétries axiales orthogonales par rapport aux côtés de ces rectangles non "portés" par ces deux triangles rectangles.

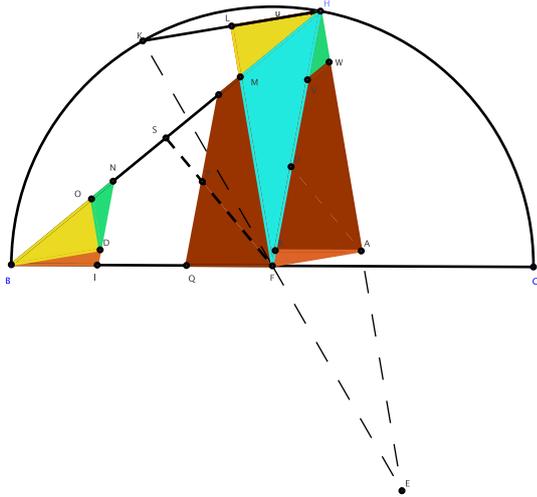
Triangle AGC Voir figure ci-dessous. R_1 étant le milieu de $[GC]$, on construit $A_2 = [FG] \cap [ER_1]$ puis B_2 tel que $\overrightarrow{B_2G} = \overrightarrow{A_2R_1}$. En notant α le quatrième sommet (non représenté sur la figure) du parallélogramme $A_2GB_2\alpha$, on construit $E_2 = [EG] \cap [B_2\alpha]$. De même, Z_1 étant le milieu de $[AG]$, en notant β le quatrième sommet (non représenté sur la figure) du parallélogramme $FEZ_1\beta$, on construit $G_2 = [EG] \cap [Z_1\beta]$. Pour le segment $[Z_1Q_2]$ en pointillé, on considère la droite Δ contenant Z_1 et orthogonale à $[FG]$, et on construit $Q_2 = [EG] \cap \Delta$. Nous avons obtenu cinq parties dont un quadrilatère sécable selon le pointillé (six morceaux).

Triangle AIB O est le milieu de $[ID]$, Q est le milieu de $[IB]$. La droite passant par O et perpendiculaire à $[IF]$ recoupe $[QD]$ en S . T est le quatrième sommet du rectangle $IQST$. La droite passant par T et perpendiculaire à $[IF]$ recoupe $[QD]$ en Z . Enfin en notant γ le quatrième sommet (non représenté sur la figure) du parallélogramme $RDF\gamma$, on construit $A_1 = [ID] \cap [R\gamma]$. Les segments pointillés s'obtiennent, comme pour S, T, Z en partant de O mais en menant des sécantes à $[IR]$ et $[QD]$ parallèles à $[IF]$. Nous avons obtenu cinq parties dont un quadrilatère et un triangle sécables selon le pointillé (sept morceaux).

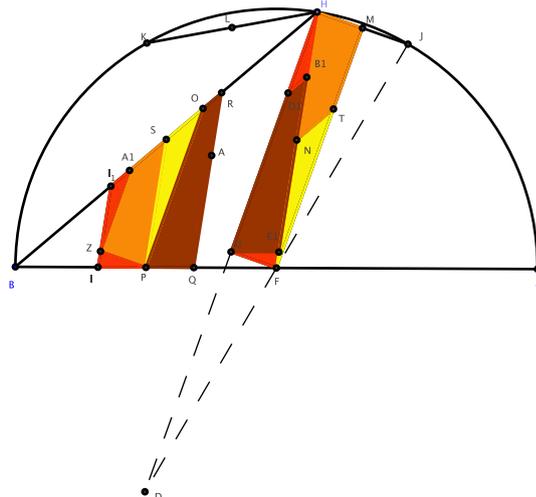
Nous pouvons alors reconstituer BFH avec les dix parties (treize morceaux pour utiliser ensuite les symétries axiales).



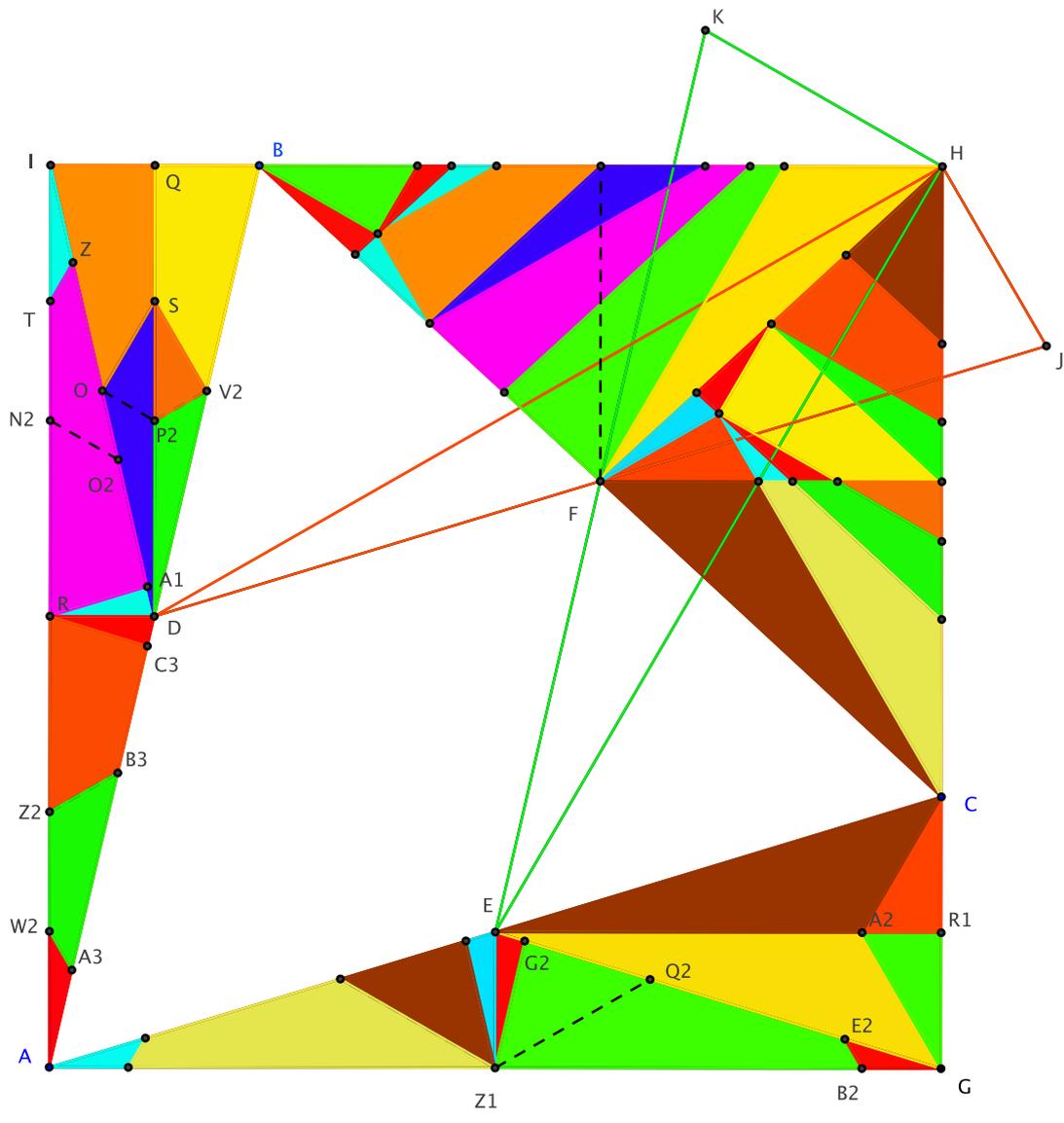
Rectangle **FLHA** découpé dans **BFH**



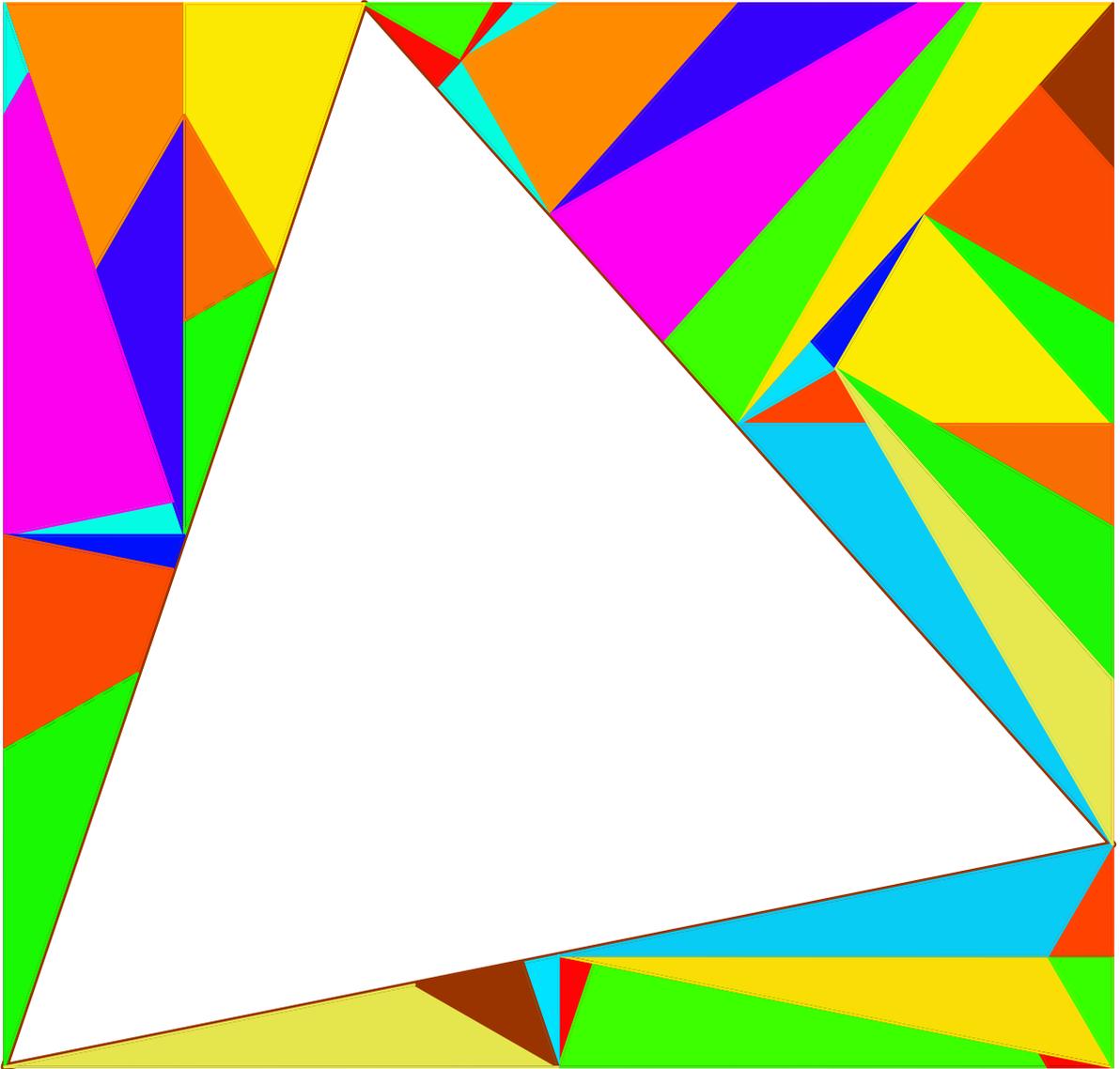
Rectangle **FUHM** découpé dans **BFH**



Achèvement du pavage de BHC en utilisant les symétries axiales orthogonales
 (On obtient ainsi 23 morceaux dont certains recombinaibles. Finalement 20 morceaux suffisent !)



L'œuvre épurée



Trilogie à dualité latérale - ÉRIC TROTOUX