

## 1 Problème 1 : Une configuration géométrique

Dans le plan, soient  $A, B, C$  trois points distincts tels que  $B$  soit sur le segment  $[AC]$ . Soit  $\Gamma$  le cercle de diamètre  $[AC]$ ,  $\gamma$  le cercle de diamètre  $[BC]$ , et  $\Delta$  la tangente en  $B$  à  $\gamma$ .

On suppose donné un cercle  $\gamma'$  qui est tangent extérieurement à  $\gamma$  en  $D$ , tangent à  $\Delta$  en  $E$ , et tangent intérieurement à  $\Gamma$  en  $F$ .

- Justifier que les droites  $\Delta$  et  $(CF)$  ne sont pas parallèles.  
On note  $G$  leur point d'intersection.
- Montrer qu'il existe une homothétie de centre  $C$  qui transforme  $\gamma$  en  $\Gamma$  et une homothétie de centre  $F$  qui transforme  $\Gamma$  en  $\gamma'$ .
- Déterminer les centres des homothéties qui transforment  $\gamma$  en  $\gamma'$ .
- Soit  $I$  le milieu de  $[BE]$ .  
Montrer que les points  $A, I, D$  sont alignés sur une droite orthogonale à  $(GD)$ .
- Montrer que  $AB = GD$ .
- Exprimer le rayon  $r'$  de  $\gamma'$  en fonction des rayons  $R$  et  $r$  de  $\Gamma$  et  $\gamma$ .

## 2 Problème 2 : Des configurations géométriques

Dans le plan, on considère  $n$  points ( $n \geq 3$ ) tels que 3 quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. On construit des triangles de sommets choisis parmi ces points qui vérifient la condition suivante :

*Deux triangles distincts quelconques ont zéro ou deux sommets en commun, jamais un seul.*

On appelle  $t(n)$  le nombre maximal de triangles que l'on peut ainsi former.

- Vérifier que  $t(4) = 4$  puis déterminer  $t(5)$  et  $t(6)$ .
- Montrer que  $t(n) \leq n$ , puis déterminer la valeur exacte de  $t(n)$  en fonction de  $n$ .

On ajoute à présent la condition suivante sur les triangles que l'on cherche à former :

*Deux triangles distincts quelconques n'ont pas de points intérieurs en commun,*

autrement dit ne peuvent pas se « chevaucher ». On note alors  $u(n)$  le nombre maximal de triangles possibles (en tenant compte du positionnement des points initiaux).

- Vérifier que  $u(4) = 3$  et déterminer  $u(5)$  et  $u(6)$ .
- Déterminer  $u(n)$  en fonction de  $n$ .

## 3 Problème 3 : De la vie sur Mars!

La dernière sonde, envoyée sur Mars par l'Union Européenne, a enfin réussi à observer ce que l'on attendait depuis longtemps : des traces de vie sur la Planète Rouge! Il s'agit évidemment d'une forme primitive de vie, et les êtres observés ne mesurent pas plus d'un millièmètre, ce qui explique la difficulté que la sonde a eue à remarquer ce que nous appellerons des *cellules*.

Avec des informations aussi partielles, les scientifiques ont toutefois pu observer les faits suivants :

- Il y a trois espèces de cellules, que l'on désignera par  $A, B$  et  $C$ .
- La reproduction des cellules implique la participation de trois cellules « parents ».
- Il ne peut y avoir reproduction que lorsque les trois parents sont « compatibles », c'est-à-dire que au moins deux sont de la même espèce.

- On a observé des proportions respectives  $a, b, c$  de cellules des différentes espèces, avec  $a + b + c = 1$ .

a. Quelle est la probabilité  $p$  que trois cellules prises au hasard soient compatibles?

b. Montrer que  $p \geq \frac{7}{9}$ . On pourra d'abord établir une inégalité à  $c$  fixé.

Les scientifiques ont établi que lorsque les trois espèces des parents sont les mêmes, la descendance est de la même espèce que ses parents. En revanche, lorsque deux parents sont d'une espèce  $\alpha$  et que le troisième est d'une espèce  $\beta$ , les scientifiques hésitent entre deux modèles :

- Modèle 1 : le descendant est du type de l'espèce majoritaire  $\alpha$ ,
- Modèle 2 : le descendant est du type de l'espèce minoritaire  $\beta$ .

Pour comparer ces modèles, on va estimer l'évolution des proportions de cellules des différentes espèces au cours du temps. On note  $a_0 > b_0 > c_0$  les proportions des différentes espèces à la génération 0, et  $a_n, b_n, c_n$  les proportions des différentes espèces à la génération  $n \in \mathbb{N}$ . Pour déterminer  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ , on prend trois cellules au hasard suivant les proportions  $a_n, b_n, c_n$ , et  $a_{n+1}$  sera la probabilité que la descendance soit de type  $A$ , sachant que les trois parents sont compatibles. Il en est de même pour  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$ .

- Étude du premier scénario.** On suppose dans cette question que la génétique des cellules martiennes suit le premier scénario.

a. Vérifier que :

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n}, \quad b_{n+1} = \frac{b_n^2(3-2b_n)}{1-6a_nb_nc_n}, \quad c_{n+1} = \frac{c_n^2(3-2c_n)}{1-6a_nb_nc_n}$$

- On rappelle dans cette question et les suivantes que  $a_0 > b_0 > c_0$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $a_n > b_n > c_n$ . En déduire que  $a_n > \frac{1}{3}$ ,  $b_n < \frac{1}{2}$  et  $c_n < \frac{1}{3}$ .
- Vérifier que les suites  $(a_n - b_n)_{n \geq 0}$  et  $(a_n - c_n)_{n \geq 0}$  sont croissantes.
- Prouver que  $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$  et  $(c_n)_{n \geq 0}$  convergent et déterminer leurs limites.

- 3. Étude du second scénario.** On suppose maintenant que c'est le deuxième scénario qui est privilégié.
- a.** Déterminer  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$ ,  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ .
  - b.** On suppose à partir de maintenant que  $1 > a_0 > b_0 > c_0 > 0$ . Montrer que pour tout  $n$  on a  $1 > a_n > b_n > c_n > 0$ .
  - c.** On pose  $f(c) = \frac{3}{2} - 3c + \frac{5}{2}c^2$  et  $g(c) = 1 - 6c^2 + 12c^3$ . Vérifier que  $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$ .
  - d.** Déterminer les limites de  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$ .
  - e.** Quel scénario vous semble le plus pertinent?