

## 1 Problème 1

On munit le plan affine euclidien  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $S$  la courbe d'équation :

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}$$

1. Quelle est la nature géométrique de  $S$ ?
2. Pour tout couple  $(u, v)$  de nombre réels on note  $U$  le point de coordonnées  $(u, v)$ , et pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$  on note  $M(x)$  le point de  $S$  d'abscisse  $x$ . On pose :

$$f_U(x) = UM(x), \quad g_U(x) = [f_U(x)]^2$$

- a. Calculer  $g_U$ ,  $g'_U$ , et  $g''_U$ . Résoudre l'équation  $g''_U(x) = 0$ .
  - b. Donner le tableau des variations de  $f_U$  (on ne cherchera pas à calculer explicitement le ou les nombres réels où  $f_U$  admet un extremum relatif).
3. On dira qu'un cercle  $C$  de centre  $U$  et de rayon  $UM$  est tangent en  $M$  à  $S$  si  $M$  est un point de  $S$  et si les tangentes en  $M$  à  $C$  et  $S$  coïncident.  
Soit  $U$  un point du plan n'appartenant pas à  $S$ , et soit  $a$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que le cercle de centre  $U$  et de rayon  $UM(a)$  est tangent en  $M(a)$  à  $S$  si et seulement si  $g'_U(a) = 0$ .
  4. a. Montrer que tout point n'appartenant pas à  $S$  est centre d'au moins un et d'au plus 3 cercles tangents à  $S$ .  
b. Pour  $U$  n'appartenant pas à  $S$ , on note  $n(U)$  le nombre de réels  $x$  pour lesquels le cercle de centre  $U$  et de rayon  $UM(x)$  est tangent en  $M(x)$  à  $S$ . Pour  $1 \leq i \leq 3$ , caractériser par une égalité ou une inégalité simple l'ensemble des points  $U$  n'appartenant pas à  $S$  tels que  $n(U) = i$ . On pourra être amené à discuter selon le signe de  $81u^2 - 16v^3$ .  
Faire un croquis représentant  $S$  et les ensembles trouvés.
  5. a. Soit  $a$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $D(a)$  la tangente en  $M(a)$  à  $S$ . Donner une équation de  $D(a)$ .  
b. On note de nouveau  $U$  le point de  $\mathcal{P}$  de coordonnées  $(u, v)$ . Discuter en fonction de  $u$  et  $v$  l'ensemble des solutions  $a$  de l'équation  $U \in D(a)$ .  
c. On suppose que l'équation  $U \in D(a)$  admet deux solutions distinctes  $a_1$  et  $a_2$ . Montrer que, si  $UM(a_1) = UM(a_2)$ , alors on a  $u = 0$ .  
d. Soit  $U \in \mathcal{P}$ . On suppose maintenant qu'il existe un cercle de centre  $U$  tangent à  $S$  en deux points distincts  $M$  et  $N$  de  $S$ . Montrer que les tangentes à  $S$  en  $M$  et  $N$  sont concourantes, et que si l'on note  $V$  leur point d'intersection on a  $VM = VN$ .  
e. Déterminer l'ensemble des points  $U$  n'appartenant pas à  $S$  pour lesquels il existe un cercle de centre  $U$  tangent à  $S$  en deux points distincts de  $S$ .

## 2 Problème 2

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère un triangle  $ABC$  dont aucun côté n'est parallèle à l'axe des ordonnées  $Oy$ . À toute droite  $\mathcal{D}$  non parallèle à  $Oy$  on associe les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  intersections de  $\mathcal{D}$  avec les parallèles à  $Oy$  menées par  $A$ ,  $B$  et  $C$  respectivement.  
Montrer qu'il existe une unique droite  $\mathcal{D}$  pour laquelle la somme  $s$  des longueurs  $AA' + BB' + CC'$  est minimale, et la caractériser.
2. Montrer qu'il existe une droite  $\mathcal{D}$  pour laquelle la somme  $s_1$  des distances de  $A$ ,  $B$  et  $C$  à  $\mathcal{D}$  est minimale. Montrer que cette droite est unique si  $ABC$  n'est pas isocèle, et la caractériser.

## 3 Problème 3 : Les comptes « ronds »

Mon boucher ne compte jamais les centimes. Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.

1. En ramassant deux tickets tombés par terre, le boucher lit :
  - 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros;
  - 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.

Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?

2. Pourquoi est-ce que la donnée de tous les tickets de la journée ne peut en aucun cas permettre de déterminer le prix exact de chacun des produits vendus ?