

## 1 Problème 1 : Petits poids

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, et toute suite finie de  $n$  réels  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , on appelle *poids* de la suite la plus grande des valeurs  $|x_1|, |x_1 + x_2|, \dots, |x_1 + x_2 + \dots + x_n|$ .

Par exemple, pour  $n = 4$  et  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 4, 0, -9)$ , le poids de la suite est égal à 8, car :

$$|x_1| = 4, |x_1 + x_2| = 8, |x_1 + x_2 + x_3| = 8 \text{ et } |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| = 1$$

Pour  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9, 4, 0, 4)$ , le poids est égal à 9, car :

$$|x_1| = 9, |x_1 + x_2| = 5, |x_1 + x_2 + x_3| = 5 \text{ et } |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| = 1$$

On remarque que les deux suites finies ci-dessus sont formées des mêmes nombres dans un ordre différent et qu'elles ont des poids différents.

1. Déterminer le poids des suites finies suivantes :

- a.  $(3, 5, -6, -8, 2)$  (et donc  $n = 5$ ).
- b.  $(1, 2, 3, \dots, 2014, 2015, -2015, -2014, \dots, -2, -1)$  (et donc  $n = 4030$ ).
- c. Dans chacun des deux exemples précédents, réordonner les termes de façon à obtenir un poids plus petit.

On donne à Isabelle et Clara la même suite finie de  $n$  réels  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Isabelle veut la réordonner de façon à obtenir une suite finie de poids minimal. Pour cela, elle considère tous les ordres possibles de ces  $n$  réels, détermine pour chacun le poids de la suite correspondante, et choisit un ordre pour lequel le poids est minimal. On note  $I$  ce poids minimal.

De son côté, Clara, plus pressée qu'Isabelle, adopte l'algorithme suivant.

Elle commence par choisir parmi les  $n$  réels un nombre, noté  $c_1$ , de sorte que la valeur de  $|c_1|$  soit la plus petite possible. Elle choisit ensuite le nombre  $c_2$  parmi les  $n - 1$  réels qui restent, afin que la valeur de  $|c_1 + c_2|$  soit la plus petite possible. Plus généralement, après avoir choisi les nombres  $c_1, \dots, c_i$  parmi les  $n$  réels donnés au départ, elle choisit  $c_{i+1}$  parmi les  $n - i$  restants de sorte que la valeur de  $|c_1 + \dots + c_i + c_{i+1}|$  soit la plus petite possible.

Elle obtient finalement une suite finie  $(c_1, \dots, c_n)$  de  $n$  réels. On note  $C$  son poids.

2. Déterminer  $I$  et  $C$  dans les deux cas suivants.

- a.  $n = 3$  et  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -4$ .
- b.  $n = 4$  et  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$ .

3. Si  $n = 2$ , montrer que  $I = C$ .

4. Si  $n = 3$ , montrer que  $C \leq \frac{3}{2}I$ .

5. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 4 et soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la suite finie donnée à Isabelle et Clara. On pose :

$$M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad S = |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \quad N = \max(M, S)$$

Autrement dit,  $M$  est le plus grand des nombres  $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$ . De même,  $N$  est le plus grand des nombres  $M$  et  $S$ .

- a. Montrer que  $S \leq I$ .
- b. Montrer que  $M \leq 2I$ .
- c. Montrer que  $C \leq N$ .
- d. En déduire que  $C \leq 2I$ .
- e. Déterminer  $n$  réels  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tels que  $C = 2I$ .

## 2 Problème 2 : Tétraèdres

On appelle *tétraèdre* la donnée, dans l'espace, de quatre points non coplanaires  $A, B, C, D$ . Les *arêtes* du tétraèdre sont les segments  $[AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD]$ .

Dans les questions 3. à 3.,  $ABCD$  désigne un tétraèdre.

1. a. Montrer qu'il existe un unique point  $G$  tel que  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .  
 b. Montrer que  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$ , où  $G_A$  est le centre de gravité du triangle  $BCD$ .  
 c. On appelle *médiane* issue de  $A$  la droite reliant  $A$  au centre de gravité du triangle  $BCD$ , et on définit de façon analogue les trois autres médianes, issues de  $B$ , de  $C$  et de  $D$ . Montrer que les médianes sont concourantes au point  $G$ .
2. Montrer qu'il existe une unique sphère qui passe par  $A, B, C, D$ . On l'appelle sphère circonscrite au tétraèdre  $ABCD$  et on note  $O$  son centre.
3. On appelle *hauteur* issue de  $A$  la droite passant par  $A$  et orthogonale au plan  $BCD$ . On définit de façon analogue les trois autres hauteurs, issues de  $B$ , de  $C$  et de  $D$ . On dit qu'un tétraèdre de l'espace est *régulier* si toutes ses arêtes sont de même longueur.
  - a. Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en  $O$  si et seulement si le tétraèdre est régulier?
  - b. Les hauteurs sont-elles nécessairement concourantes?
  - c. Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en  $G$  si et seulement si le tétraèdre est régulier?
4. Dans ce qui suit, le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est noté  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ . Soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_4$  quatre droites distinctes non coplanaires concourantes en un point  $H$ . Pour  $1 \leq i \leq 4$  on choisit un vecteur directeur unitaire  $\vec{u}_i$  de  $\Delta_i$  et, pour  $1 \leq i, j \leq 4$ , on note  $c_{ij} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$ .
  - a. On suppose qu'il existe un tétraèdre  $A_1 A_2 A_3 A_4$  dont les hauteurs sont concourantes en  $H$  et tel que  $A_j \in \Delta_j$  pour tout  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Montrer que  $c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23}$ .
  - b. Réciproquement, si  $c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23} \neq 0$ , montrer qu'il existe un tétraèdre  $A_1 A_2 A_3 A_4$  dont les hauteurs sont concourantes en  $H$  et tel que  $A_j \in \Delta_j$  pour tout  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

### 3 Problème 3 : Moyennes prévisionnelles

Dans ce problème, on considère des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (u_1, u_2, \dots)$  à valeurs réelles indexées par les entiers naturels non nuls. On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de type  $\mathcal{M}$  si, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  est la moyenne des  $n$  termes suivants, c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n-1} + u_{2n}}{n}$$

1. Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de type  $\mathcal{M}$  et  $C$  un nombre réel. Que dire de la suite  $(u_n - C)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ?
2. Montrer que toute suite croissante de type  $\mathcal{M}$  est constante.
3. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de type  $\mathcal{M}$ . On suppose qu'il existe des réels  $a, b, c$  tels que  $u_n = an^2 + bn + c$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $a = b = 0$ .
4. L'objectif de cette question 4. est de montrer que toute suite majorée ou minorée de type  $\mathcal{M}$  est constante.  
Dans les questions **a.** et **b.**, on suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de type  $\mathcal{M}$  à valeurs positives ou nulles, et on considère un entier  $r \in \mathbb{N}^*$ .
  - a. Soit  $p$  un entier tel que  $p > r$ . Montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls  $q$  et  $q'$  tels que  $q < p \leq q' \leq 2q$  et  $u_{q'} \leq u_q \leq u_r$ . En déduire que  $u_p \leq 3u_r$ .
  - b. Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $u_p \leq 3u_r$ .  
Dans les questions **c.** et **d.**, on suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite minorée de type  $\mathcal{M}$ .
  - c. Soit  $D$  un réel strictement positif et soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que si  $u_p - D$  n'est pas un minorant de la suite  $(u_n)$ , alors  $u_p - \frac{3}{2}D$  n'est pas non plus un minorant.
  - d. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est constante.
  - e. Conclure.
5. Existe-t-il une suite non constante de type  $\mathcal{M}$  ?