

1 Problème 1

On appelle fonctions de type T_0 les fonctions « trinômes » sur $[-1, 1]$, définies par :

$$t : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto t(x) = ax^2 + bx + c$$

a, b, c étant des réels quelconques. Pour tout entier naturel non nul n , on appelle fonctions de type T_n les fonctions de la forme $f + \lambda|g|$, λ étant un réel quelconque et f, g des fonctions quelconques de type T_{n-1} .

1. Établir que la fonction φ , définie par $\varphi(x) = 0$ pour tout x de $[-1, 0]$ et $\varphi(x) = x$ pour tout x de $[0, 1]$, est de type T_1 .
2. On considère deux fonctions trinômes t_1 et t_2 telles que $t_1(0) = t_2(0)$ et on définit la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\text{Pour tout réel } x \text{ de } [-1, 0], f(x) = t_1(x) \text{ et pour tout réel } x \text{ de } [0, 1], f(x) = t_2(x).$$

Démontrer qu'il existe un entier naturel N tel que la fonction f soit de type T_N .

2 Problème 2

On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9. Par exemple :

1	8	7
9	2	4
6	5	3

À un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-dessus) et les produits des éléments de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple ci-dessus).

1. a. Étant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.
b. Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal à 72.
2. Étant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 90.

3 Problème 3

Dans tout l'exercice, étant donné un triangle non aplati ABC , on note a, b et c les longueurs respectives des côtés BC, CA et AB . On dira que ce triangle est de type \mathcal{W} si ses médianes issues de A et B sont perpendiculaires.

3.1 Géométrie

1. Montrer qu'il existe des triangles ABC tels que l'on ait les relations :

$$c^2 = \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{3}$$

Établir qu'un tel triangle est rectangle en A et qu'il est de type \mathcal{W} .

2. Dans cette question on se fixe des points A et B et on considère l'ensemble Γ des points C tels que le triangle ABC soit de type \mathcal{W} .

- a. Déterminer l'ensemble des points G , isobarycentres de A, B et C , lorsque C décrit Γ .
- b. En déduire l'ensemble Γ .
- c. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport $\frac{b}{c}$.
- d. Représenter l'ensemble des points H , orthocentres des triangles ABC , lorsque C décrit Γ (on se placera dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que A et B aient pour coordonnées respectives $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ et l'on déterminera une fonction f telle que l'ensemble des points H soit la réunion des deux courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$).

3. Dans cette question on se fixe des points A et C et on considère l'ensemble Γ' des points B tels que le triangle ABC soit de type \mathcal{W} .

- a. Déterminer l'ensemble Γ' .
- b. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport $\frac{a}{b}$.
- c. Déterminer les triangles ABC de type \mathcal{W} ayant un rayon du cercle circonscrit minimal.
- d. Représenter l'ensemble des points H , orthocentres des triangles ABC , lorsque B décrit Γ' (on se placera dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que A et C aient pour coordonnées respectives $(-1, 0)$ et $(-5, 0)$).

4. a. Montrer qu'un triangle ABC est de type \mathcal{W} si, et seulement si, l'on a la relation :

$$(\star) \quad a^2 + b^2 = 5c^2$$

- b. Étant donné des réels strictement positifs a, b et c vérifiant la relation (\star) , donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le rapport $\frac{a}{b}$ pour que a, b et c soient les longueurs des côtés d'un triangle de type \mathcal{W} .

3.2 Arithmétique

3.2.1 Deux familles de triangles

Dans la suite de l'exercice, on se propose de rechercher les triangles de type \mathcal{W} dont les côtés ont des longueurs entières, en commençant par rechercher l'ensemble \mathcal{T} des triplets (a, b, c) d'entiers naturels strictement positifs vérifiant la relation (\star) .

On remarque que pour qu'un triplet (a, b, c) d'entiers strictement positifs soit élément de \mathcal{T} , il suffit qu'il existe un entier strictement positif m tel que le triplet (ma, mb, mc) soit élément de \mathcal{T} , de sorte qu'on peut se limiter à rechercher l'ensemble \mathcal{T}_1 des éléments de \mathcal{T} sans facteur premier commun.

1. **a.** Montrer que si (a, b, c) est élément de \mathcal{T}_1 alors les entiers a, b et c sont premiers entre eux deux à deux.
- b.** Établir que si (a, b, c) est élément de \mathcal{T}_1 alors a et b sont de parités différentes.
- c.** Montrer que si (a, b, c) est élément de \mathcal{T}_1 alors a et b ne sont divisibles ni par 3, ni par 4, ni par 5.
- d.** Soit (a, b, c) un élément de \mathcal{T}_1 . Montrer que $b^2 - 4a^2$ et $a^2 - 4b^2$ sont des multiples de 5.
En déduire qu'il existe un couple d'entiers (α, β) tels que l'on ait
$$\begin{cases} 2a + b = 5\alpha \\ -a + 2b = 5\beta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2a - b = 5\alpha \\ a + 2b = 5\beta \end{cases}.$$
 Vérifier alors que l'on a $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$, et que α et β sont premiers entre eux.
- e.** Si α et β sont des entiers premiers entre eux, les entiers a et b qui leur sont associés par les relations ci-dessus sont-ils premiers entre eux?

On admet désormais le résultat suivant : les triplets (x, y, z) d'entiers strictement positifs sans facteur premier commun, vérifiant la relation $x^2 + y^2 = z^2$ et tels que y soit pair, sont donnés par $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ et $z = u^2 + v^2$, où u et v sont des entiers strictement positifs premiers entre eux, de parités différentes et tels que $u > v$, déterminés de manière unique.

2. On dira qu'un triangle est de type \mathcal{W}_e s'il est de type \mathcal{W} et si les longueurs a, b et c de ses côtés sont des entiers sans facteur premier commun. Montrer que pour tout triangle de type \mathcal{W}_e , il existe des entiers strictement positifs u et v , premiers entre eux, de parités différentes et vérifiant $u > v$, tels que l'une des deux relations suivantes soit vérifiée :
3.
 - (1) $(a, b, c) = (2(u^2 - uv - v^2), u^2 + 4uv - v^2, u^2 + v^2)$
 - (2) $(a, b, c) = (2(u^2 + uv - v^2), -u^2 + 4uv + v^2, u^2 + v^2)$
4. Déterminer les ensembles de couples (u, v) d'entiers positifs tels que la relation (1) (respectivement (2)) conduise à un triangle de type \mathcal{W}_e .
5. Établir qu'un triangle de type \mathcal{W}_e est donné par une seule des deux relations (1) ou (2).
On classe ainsi les triangles de type \mathcal{W}_e en deux catégories disjointes, que l'on notera \mathcal{W}_1 et \mathcal{W}_2 .
6. Donner les longueurs des côtés des triangles de type \mathcal{W}_e dont le « petit » côté c a une longueur inférieure ou égale à 50.

3.2.2 Entiers de la forme $u^2 - uv - v^2$ et leurs diviseurs

On se propose d'étudier les facteurs premiers supérieurs ou égaux à 7 des entiers a et b , longueurs des côtés BC et CA d'un triangle de type \mathcal{W}_e .

1. On note ω et ω' les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
Établir la relation $u^2 - uv - v^2 = (u - \omega v)(u - \omega' v)$. En déduire que l'ensemble des entiers de la forme $u^2 - uv - v^2$, où u et v sont des entiers relatifs arbitraires, est stable par multiplication.
Que peut-on dire de l'ensemble des entiers de la forme $u^2 + 4uv - v^2$, où u et v sont des entiers relatifs arbitraires?
2. Soit $p = 2q + 1$ un nombre premier strictement supérieur à 5 qui divise un entier de la forme $u^2 - uv - v^2$, où u et v sont des entiers relatifs premiers entre eux.
 - a.** Établir les congruences $(2u - v)^2 \equiv 5v^2$ modulo p et $(u + 2v)^2 \equiv 5u^2$ modulo p .
 - b.** En déduire que $5^q \equiv 1$ modulo p .
 - c.** Soit j un entier compris entre 1 et q , on note r_j le reste de la division de $5j$ par p . Si $r_j \leq q$ on pose $f(j) = r_j$ et $\varepsilon(j) = 1$; dans le cas contraire on pose $f(j) = p - r_j$ et $\varepsilon(j) = -1$, de sorte que l'on a dans tous les cas $1 \leq f(j) \leq q$ et $5j \equiv \varepsilon(j)f(j)$ modulo p .
Montrer que les entiers $f(1), f(2), \dots, f(q)$ sont deux à deux distincts et en déduire que le nombre d'entiers j , compris entre 1 et q et tels que $\varepsilon(j) = -1$, est pair.
 - d.** Pour tout nombre réel x , on note $[x]$ sa partie entière, à savoir le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .
Montrer que $\left\lfloor \frac{4p}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3p}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{10} \right\rfloor$ est pair, puis que $p \equiv \pm 1$ modulo 10.
3. Soient (a, b, c) les longueurs des côtés d'un triangle de type \mathcal{W}_e .
 - a.** Montrer que tous les facteurs premiers impairs de a sont congrus à 1 ou à 9 modulo 10.
 - b.** Que peut-on dire des facteurs premiers de b ?