

1 Problème 1 : Nombres pointus

Soit n un entier naturel non nul. On dit que n est pointu si n admet au plus un facteur premier ou bien si, en notant p et q les deux plus grands facteurs premiers de n , avec $p > q$, l'inégalité $p \geq 2q$ est vérifiée.

Par exemple, 1 est pointu, car il n'a aucun facteur premier. De même, 25 est pointu, car il n'a qu'un seul facteur premier, et 147 est pointu, car $147 = 3 \times 7^2$ et $7 \geq 2 \times 3$. Au contraire, 105 n'est pas pointu, puisque $105 = 3 \times 5 \times 7$ et $7 < 2 \times 5$.

Dans ce problème, on cherche à démontrer qu'il existe des suites arbitrairement longues d'entiers consécutifs pointus. Plus précisément, on souhaite démontrer la propriété \mathcal{P} suivante :

Pour tout entier $m \geq 1$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que les nombres $n+1, n+2, \dots, n+m$ soient tous pointus.

1.1 Quelques exemples

1. Le nombre 2020 est-il pointu?
2. Quel est le plus petit entier naturel non nul qui ne soit pas pointu?
3. Quel est le plus petit nombre pointu possédant au moins quatre facteurs premiers distincts?
4. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres pointus.
5. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels non nuls qui ne sont pas pointus.
6. Établir la liste des nombres pointus entre 1 et 20 inclus. Quelle est la longueur maximale d'une suite de nombres pointus consécutifs entre 1 et 20?

1.2 Peu de grands nombres premiers

On pose $0! = 1$, et $\ell! = 1 \times 2 \times \dots \times \ell = \ell(\ell-1)!$ pour tout entier $\ell \geq 1$. Soient alors k et n deux entiers naturels tels que $k \leq n$. On s'intéresse à la fraction

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

que l'on note $F_{n,k}$.

7. a. Calculer les valeurs des nombres $F_{3,1}$ et $F_{9,4}$.
b. Démontrer que, si $k = 0$ ou $k = n$, alors $F_{n,k} = 1$.
c. Démontrer que, si $1 \leq k \leq n-1$, alors $F_{n,k} = F_{n-1,k} + F_{n-1,k-1}$.
d. En déduire que, pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel $k \leq n$, $F_{n,k}$ est un entier naturel non nul inférieur ou égal à 2^n .

Dans cette question et dans les parties qui suivent, pour tout entier naturel n , on note \mathbb{P}_n l'ensemble des nombres premiers p tels que $n+1 \leq p \leq 2n$, et on note π_n le nombre d'éléments de \mathbb{P}_n .

8. a. Démontrer que, pour tout nombre premier p appartenant à l'ensemble \mathbb{P}_n , l'entier $F_{2n,n}$ est divisible par p .
b. Démontrer que, si a, b et c sont des entiers naturels non nuls tels que b et c sont premiers entre eux et divisent a , alors l'entier bc divise a lui aussi.
c. Soit d le produit de tous les éléments de \mathbb{P}_n . Démontrer que l'entier $F_{2n,n}$ est divisible par d .
d. En déduire que $n^{\pi_n} \leq 2^{2n}$.

1.3 Des ensembles à peu d'éléments

Soient b un entier naturel non nul, et $f_b :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_b(x) = \frac{(\ln(x))^b}{x} \quad \text{pour tout } x > 0$$

9. a. Soient x un nombre réel tel que $x > 1$, et soit $y = \ln(x)/b$. Démontrer que :

$$f_b(x) = \frac{b^b}{(\exp(y)/y)^b}$$

- b. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_b(x) = 0$.

Dans la suite de cette partie, on considérera deux entiers naturels non nuls ℓ et n fixés, tels que $n \geq 2$.

10. On note A_ℓ l'ensemble des entiers naturels non nuls dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à 2^ℓ .

- a. Parmi les entiers compris entre 1 et 30 inclus, lesquels appartiennent à l'ensemble A_2 ?
- b. On note p_1, p_2, \dots, p_k les nombres premiers inférieurs ou égaux à 2^ℓ , numérotés dans l'ordre croissant. Soit alors a un élément de A_ℓ qui soit inférieur ou égal à n . Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ les entiers naturels tels que :

$$a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

Démontrer que les entiers naturels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont tous inférieurs ou égaux à $\ln(n)/\ln(2)$.

- c. En déduire que A_ℓ compte au plus

$$\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)} + 1 \right)^{2^\ell}$$

éléments inférieurs ou égaux à n .

- d. On pose $b = 2^\ell$. Démontrer que A_ℓ compte au plus

$$\frac{2}{(\ln(2))^b} \times f_b(2n) \times n$$

éléments inférieurs ou égaux à n .

11. Soit k un entier naturel non nul. On rappelle que l'ensemble \mathbb{P}_{2^k} désigne l'ensemble des nombres premiers p tels que $2^k + 1 \leq p \leq 2 \times 2^k$, et que π_{2^k} est le nombre d'éléments de \mathbb{P}_{2^k} .

a. Expliciter les ensembles \mathbb{P}_{2^1} et \mathbb{P}_{2^2} .

On note $B_{k,1}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls ayant au moins un facteur premier dans l'ensemble \mathbb{P}_{2^k} , et on note $B_{k,2}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls ayant au moins deux facteurs premiers distincts dans l'ensemble \mathbb{P}_{2^k} .

b. Quel est le plus petit élément de l'ensemble $B_{2,2}$?

c. Soit p un nombre premier. Démontrer que le nombre d'entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n et multiples de p est au plus de n/p .

d. Démontrer que l'ensemble $B_{k,1}$ compte au plus $n \times \pi_{2^k} / 2^k$ éléments inférieurs ou égaux à n .

e. En déduire que l'ensemble $B_{k,1}$ compte au plus $2n/k$ éléments inférieurs ou égaux à n .

f. Soit p_1 et p_2 deux nombres premiers distincts. Démontrer que le nombre d'entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n et multiples de p_1 et p_2 est au plus de $n / (p_1 \times p_2)$.

g. En déduire que l'ensemble $B_{k,2}$ compte au plus $4n/k^2$ éléments inférieurs ou égaux à n .

12. Pour tout entier $k \geq 2$, on note également C_k l'ensemble $(B_{k-1,1} \cap B_{k,1}) \cup B_{k,2}$.

a. Quel est le plus petit élément de l'ensemble C_2 ?

b. Démontrer que l'ensemble C_k compte au plus :

$$\frac{4n}{k^2} + \frac{4n}{k(k-1)}$$

éléments inférieurs ou égaux à n .

13. On fixe maintenant un entier $\ell \geq 2$, et on note D_ℓ l'ensemble des entiers qui appartiennent à au moins l'un des ensembles C_k tels que $k \geq \ell$.

a. Démontrer que tout élément de $\{1, \dots, n\}$ appartenant à l'ensemble D_ℓ appartient à l'un des ensembles $C_\ell, C_{\ell+1}, \dots, C_n$

b. Démontrer, pour tout entier $k \geq 2$, que :

$$\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k}$$

c. En déduire que D_ℓ compte au plus $8n/(\ell-1)$ éléments inférieurs ou égaux à n .

1.4 Beaucoup de nombres pointus

Dans cette partie, on considère un entier naturel non nul m fixé.

14. Démontrer qu'il existe un entier $\ell \geq 2$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble D_ℓ compte au plus n éléments inférieurs ou égaux à $3mn$.

Dans la suite, on considère également un tel entier ℓ .

15. Soit a un entier naturel non nul. Démontrer que, si a n'est pas pointu, alors a appartient à A_ℓ ou à D_ℓ .

16. Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que l'ensemble A_ℓ compte au plus n éléments inférieurs ou égaux à $3mn$.

17. En déduire qu'il existe un entier naturel k inférieur ou égal à $2n$ et tel que chacun des entiers $mk+1, mk+2, \dots, m(k+1)$ soit pointu.

18. Démontrer la propriété \mathcal{P} introduite en préambule de l'énoncé.

2 Problème 2 : Un nombre explosif

Si α est un réel strictement positif, on définit la suite (x_n) par $x_1 = \alpha$ et

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^n \quad \text{pour tout entier } n \geq 1,$$

que l'on appelle *suite associée* à α .

On dit que le nombre α est *explosif* si la suite (x_n) associée à α diverge vers $+\infty$.

Le but du problème est de prouver qu'il existe un unique nombre explosif.

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par f_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \quad \text{pour tout réel } x > 0$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$x_{n+1} = f_n(x_n)$$

Dans tout le problème, pour tout réel t , l'exponentielle de t sera notée $\exp(t)$.

2.1 Un encadrement de $f_n(x)$

Soit x un réel strictement positif.

1. Démontrer que $\frac{1}{x+1} \leq \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{x}$.

2. En déduire que $\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.

3. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\exp(n/(x+1)) \leq f_n(x) \leq \exp(n/x)$$

2.2 Un critère d'explosivité

4. Soit α un réel strictement positif et (x_n) la suite associée à α . La suite (x_n) peut-elle être majorée? Peut-elle être convergente?

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $y_n = \frac{n+1}{\ln(n+2)} - 1$.

5. a. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[2; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x}{\ln(x+1)} \quad \text{pour tout réel } x \geq 2$$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 8$, on a $y_n > e$.

c. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $y_n > 1$ et $y_{n-1} \leq \frac{n}{\ln(y_n)}$.

6. Soit α un réel strictement positif et (x_n) la suite qui lui est associée.

a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 8$, si $x_n < y_{n-1}$ alors $x_{n+1} > n+1$ et $x_{n+2} < e$.

b. En déduire que, si α est explosif, alors $x_n \geq y_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 8$.

c. Démontrer que, si α est explosif, alors $x_n \leq \frac{n}{\ln(y_n)}$ pour tout entier $n \geq 8$.

d. Démontrer que α est explosif si et seulement si $y_{n-1} \leq x_n \leq \frac{n}{\ln(y_n)}$ pour tout entier $n \geq 8$.

7. Soient α, β et γ des réels strictement positifs tels que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Démontrer que, si α et γ sont explosifs, alors β est explosif.

2.3 Un unique nombre explosif

Soient r et s deux fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* et telles que $s(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$. On désigne par $r \circ s$ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$r \circ s(x) = r(s(x)) \quad \text{pour tout réel } x > 0$$

On pose alors $h_1 = f_1$ et

$$h_n = f_n \circ h_{n-1} \quad \text{pour tout entier } n \geq 2$$

De plus, on note $h_n(\mathbb{R}_+^*)$ l'ensemble des réels $h_n(x)$ lorsque x décrit \mathbb{R}_+^* .

On admettra enfin que, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction h_n est continue sur \mathbb{R}_+^* .

8. a. Expliciter l'expression de $h_2(x)$ pour tout réel $x > 0$.

b. Soit α un réel strictement positif et (x_n) sa suite associée.
Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer x_{n+1} en fonction de h_n et α .

9. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction h_n est strictement monotone sur \mathbb{R}_+^* .

b. À l'aide de la calculatrice et sans plus de justification, déterminer des valeurs approchées à 10^{-2} près des réels u et v tels que $u; v[= h_8(\mathbb{R}_+^*)$.
Vérifier que l'on a $u < e$ et $9 < v$.

c. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 9$, on a $[e; n] \subset h_{n-1}(\mathbb{R}_+^*)$.

d. En déduire que, pour tout entier $n \geq 9$, on a $[y_{n-1}; n/\ln(y_n)] \subset h_{n-1}(\mathbb{R}_+^*)$.

Pour tout entier $n \geq 9$, on pose $I_n = [y_{n-1}; n/\ln(y_n)]$ et on note J_n l'ensemble des réels strictement positifs x tels que $h_{n-1}(x) \in I_n$.

10. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 9$, il existe des réels a_n et b_n tels que $J_n = [a_n; b_n]$.

b. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 9$, on a $J_{n+1} \subset J_n$.

c. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent.

Dans toute la suite, on note α et β les limites respectives des suites (a_n) et (b_n) .

De plus, on désigne par (α_n) et (β_n) les suites respectivement associées à α et β . On rappelle que cela signifie que $\alpha_1 = \alpha$ et $\beta_1 = \beta$ et que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\alpha_{n+1} = f_n(\alpha_n) \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} = f_n(\beta_n)$$

11. a. Démontrer que α et β sont explosifs.

b. Démontrer qu'un réel $x > 0$ est explosif si et seulement si $\alpha \leq x \leq \beta$.

12. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 9$ et tout réel $x \in I_n$, on a :

$$|f'_n(x)| \geq \left| f'_n\left(\frac{n}{\ln(y_n)}\right) \right|$$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 9$ et tout réel $x \in I_n$, on a :

$$|f'_n(x)| \geq \frac{y_n (\ln(y_n))^2}{n} \exp\left(-\frac{1 + \ln(y_n)}{n + \ln(y_n)} \ln(y_n)\right)$$

c. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n \ln(n)}{n} = 1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y_n)}{\ln(n)} = 1$.

d. En déduire qu'il existe un entier $N \geq 9$ tel que, pour tout entier $n \geq N$ et tout réel $x \in I_n$, on a :

$$|f'_n(x)| \geq 2$$

13. Dans cette question, on désigne donc par N un tel entier.

a. Déduire du 12.d. que, pour tout entier $n \geq N$ et pour tous réels x et y dans I_n , on a :

$$|f_n(x) - f_n(y)| \geq 2|x - y|$$

b. Démontrer que, si $\alpha < \beta$, alors il existe un réel strictement positif C tel que :

$$|\alpha_n - \beta_n| \geq C \times 2^n \quad \text{pour tout entier } n \geq N$$

14. a. Démontrer qu'il n'existe qu'un seul nombre explosif.

b. À l'aide de la calculatrice et en indiquant l'algorithme utilisé, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.