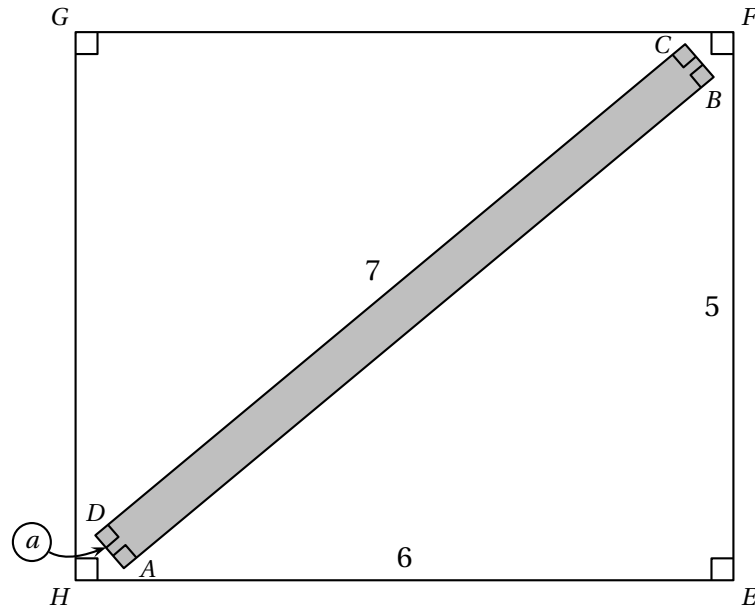


1 Problème 1 : C'est dans la boîte



Quelles valeurs de a conviennent ?

2 Problème 2 : Rendez la monnaie !

Un acheteur a dans son porte-monnaie n pièces. Notons a_1, \dots, a_n la valeur faciale de ces pièces - ce sont des nombres entiers strictement positifs. Convenons d'appeler *capacité* de ce porte monnaie le plus grand nombre entier M tel que l'on puisse payer sans rendu de monnaie toute somme (entière) de 1 à M . Notons $C(a_1, \dots, a_n)$ la capacité du porte monnaie contenant les pièces a_1, \dots, a_n .

1. **Sans rendu.** On suppose dans cette question que l'on a $a_1 = 1$ et $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.
 - a. Calculer les capacités $C(1, 2, 4)$, $C(1, 2, 5)$ et $C(1, 2, 3, 4, 5)$.
 - b. Soit j un nombre entier compris entre 1 et $n - 1$ et fixons les nombres a_1, \dots, a_j . À quelle condition sur a_{j+1} a-t-on $C(a_1, \dots, a_j) \neq C(a_1, \dots, a_j, a_{j+1})$?
 - c. Donner une méthode pour calculer $C(a_1, \dots, a_n)$.
 - d. On fixe n . Comment choisir les nombres entiers a_1, \dots, a_n pour que la capacité $C(a_1, \dots, a_n)$ soit la plus grande possible ?
2. **Avec rendu de monnaie.** Le marchand chez qui notre acheteur va faire ses courses possède aussi un porte-monnaie, lui permettant de rendre la monnaie. Fixons des nombres entiers n et p . Nommons *capacité commune* le plus grand nombre entier M tel que l'on puisse payer (c'est-à-dire accomplir la transaction) toute somme qui soit un nombre entier de 1 à M . Comment choisir les porte-monnaies (a_1, \dots, a_n) de l'acheteur et (v_1, \dots, v_p) du vendeur afin qu'ils offrent la plus grande capacité commune possible ?

3 Problème 3 : La racine du carré

On considère l'ensemble $\mathbb{U}_m = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{m}\right) \mid 0 \leq k \leq m-1 \right\}$; on rappelle que c'est aussi l'ensemble des racines m -ièmes complexes de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $z^m = 1$.

On se donne un entier strictement positif n et on cherche s'il existe une fonction $f : \mathbb{U}_{2n} \rightarrow \mathbb{U}_{2n}$ vérifiant $f(f(z)) = z^2$ pour tout z dans \mathbb{U}_{2n} .

1. Montrer que l'ensemble $\{z^2 \mid z \in \mathbb{U}_{2n}\}$ est égal à \mathbb{U}_n et qu'il est inclus dans \mathbb{U}_{2n} .
2. On suppose qu'il existe une solution f au problème considéré.
 - a. Vérifier que $f(z^2) = (f(z))^2$ pour tout z dans \mathbb{U}_{2n} .
 - b. Montrer que $f(z) = f(z') \implies z = \pm z'$ et que $f(1) = f(-1) = 1$.
3. Selon la valeur de n , existe-t-il un élément de z de \mathbb{U}_{2n} qui vérifie $z^2 = -1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.
4. Selon la valeur de n , existe-t-il un élément de z de \mathbb{U}_{2n} qui vérifie $z^3 = 1$ avec $z \neq 1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.
5. On suppose dans toute la suite de l'énoncé que l'entier n est impair.
 - a. Vérifier que la fonction g de \mathbb{U}_n dans lui-même qui à z appartenant à \mathbb{U}_n associe z^2 est bijective.
 - b. On suppose qu'il existe une solution f au problème. Vérifier qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{U}_n \rightarrow \mathbb{U}_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$.
 - c. Réciproquement, on suppose qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{U}_n \rightarrow \mathbb{U}_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$. Construire alors une solution f au problème.
 - d. Exemple : on prend $n = 5$, dire s'il existe une solution au problème, si oui en construire une.
 - e. Même question avec $n = 7$ puis $n = 9$.